測度係数常微分方程式の確率的扱いについて(Noncausal Calculusとその周辺)

数理解析研究所講究録
527巻 1984年 111-117

測度係数常微分方程式の確率的扱いについて

東北大理 岡田達也 (Tatsuya Okada)
東北大理 岡田正己 (Masami Okada)

§0. まえがきと謝辞…… 次の2階楕円型作用素 P_1, P_2 を考える。$P_1=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, $P_2=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$
但し a_{ij} は有界だが、一般には滑らかとは限らない函数とし、(a_{ij}) は非負対称行列とする。P_1 と P_2 を、そして両者の違いを調べよ、という問題提起は、例えば、M. Bony (C.I.M.E. 1969 Potential Theory) にもある。これを次の非常に特別な場合に考えてみよう、というのが我々の目的である。(であった!)

<u>目標</u> $Q_1 = 1_{x<0}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a^2 1_{x>0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $Q_2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(1_{x<0}\frac{\partial}{\partial x} + a^2 1_{x>0}\frac{\partial}{\partial x}\right) = Q_1 + (a^2-1)\delta\frac{\partial}{\partial x}$ の違いを調べること。但し a は 1 と異なる正の常数。

局所時間による、もっと確率的な研究としては、参考文献を見てほしい。我々の仕事は、局所時間を用いないで、直接、微分方程式との関連を目ざしている。

2月に小川氏の企画された数理研シンポジュームの際に志賀・本尾、西氏、他に Le Gall 氏らによって測度を drift に持つ確率微分方程式が解かれていることを御本人達にうかがうことができたし、さらにディスカッションによって大へんに啓発されたことを、ここに記し、あわせて感謝します。

§1 直観的概略 ----- $\alpha \neq 0$ に対して $\Phi_{n,\alpha}$ を

$$\Phi_{n,\alpha}(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{4n}(1-\alpha) & \cdots\cdots \quad x\leq -\frac{1}{n} \\ \frac{n}{4}(\alpha-1)x^2+\frac{1}{2}(\alpha+1)x & \cdots\cdots \quad -\frac{1}{n}<x\leq\frac{1}{n} \\ \alpha x+\frac{1}{4n}(1-\alpha) & \cdots\cdots \quad \frac{1}{n}<x \end{cases}$$

で定義する。$\Phi'_{n,\alpha}=\frac{d\Phi_{n\alpha}}{dx}$ とし、x_t^n を S.D.E.

$$\begin{cases} dx_t^n=\dfrac{1}{\Phi'_{n,\alpha}(x_t^n)}\,db_t \\ x_0^n=x(0) \end{cases} \qquad n=1,2,3,\cdots\cdots$$

の解とする。x_t^nの生成作用素は $\frac{1}{2(\Phi'_{n,\alpha})^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ である。つぎに $y_t^n=\Phi_{n,\alpha}(x_t^n)$ とおく。y_t^nの生成作用素は、$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\Phi''_{n,\alpha}}{(\Phi'_{n,\alpha})^2}\circ\Phi^{-1}_{n,\alpha}\frac{\partial}{\partial y}$ である。但し $\Phi^{-1}_{n,\alpha}$ は $\Phi_{n,\alpha}$ の逆函数である。$C_{n,\alpha}(y)=\frac{1}{2}\frac{\Phi''_{n,\alpha}}{(\Phi'_{n,\alpha})^2}\circ\Phi^{-1}_{n,\alpha}(y)$ とおけば、Support $C_{n,\alpha}$ $=[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$ であり、$\int C_{n,\alpha}(y)\,dy=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\frac{\Phi''_{n,\alpha}}{\Phi'_{n,\alpha}}(x)\,dx=\frac{1}{2}\left[\log\Phi'_{n,\alpha}(x)\right]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}$ $=\frac{1}{2}\log\alpha$ だから $C_{n,\alpha}(y)\longrightarrow\frac{1}{2}\log\alpha\,\delta$ $(n\longrightarrow+\infty)$ である。これより $y_t=\lim_{n\to\infty}y_t^n$ なる拡散過程の存在と一意性がいえれば、即ち、$x_t=\lim_{n\to\infty}x_t^n$ の存在と一意性が示されれば、y_tは $\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\log\alpha\,\delta\frac{\partial}{\partial y}$ を"生成作用素"

とする拡散過程であると思ってよいわけである。さらに x_t^n がマルチンゲール $\Longleftrightarrow$ $\Phi_{n,\alpha}^{-1}(y_t^n)$ マルチンゲール、だから $\Phi_{n,\alpha}^{-1}$ は $\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\Phi''_{n,\alpha}}{(\Phi'_{n,\alpha})^2}\circ\Phi_{n,\alpha}^{-1}(y)\frac{\partial}{\partial y}$ に対応する"調和函数"であり、$\lim_{n\to\infty}\Phi_{n,\alpha}^{-1}(y)=\Phi_{\frac{1}{\alpha}}(y)=\begin{cases} y & \cdots\ y\leq 0 \\ \frac{1}{\alpha}y & \cdots\ y>0 \end{cases}$ は $\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\log\alpha\,\delta\frac{\partial}{\partial y}$ に対応する"調和函数"であると考えられる。以上が rough な あらまし である。

§2 時刻変更 …… まず、以下の S. D. Es は少くとも同値の意味で一意的にとけることがわかっている

。 $\begin{cases} dx_t^n = \dfrac{1}{\Phi'_{n,\alpha}(x_t^n)}\,db_t \\ x_0^n = x(0) \end{cases}$, $\begin{cases} dx_t = \varphi_{1/\alpha}(x_t)\,db_t \\ x_0 = x(0) \end{cases}$

但し $\varphi_{\frac{1}{\alpha}}(x)=\begin{cases} 1 & \cdots\ x<0 \\ \frac{1}{2}(1+\frac{1}{\alpha}) & \cdots\ x=0 \\ \frac{1}{\alpha} & \quad x>0 \end{cases}$ 。これだけでは、x_t^n が $x_t\equiv x_t^{(\alpha)}$ に収束するかどーかわからないが、実は、$x_t^n=x(0)+b_{\rho_{n,t}^{-1}}$, $x_t=x(0)+b_{\rho_t^{-1}}$ 但し $\rho_{n,t}$ と ρ_t は夫々 $\rho_{n,t}=\int_0^t(\Phi'_{n,\alpha})^2(x(0)+b_s)\,ds$, $\rho_t=\int_0^t\frac{1}{(\varphi_{\frac{1}{\alpha}})^2}(x(0)+b_s)\,ds$ と表わされることが知られている(例えば[5])ので、$n\to+\infty$ の時、$\rho_{n,t}\to\rho_t$ 従って $x_t^n\to x_t$ P.P. がわかる。x_t の生成作用素は $\frac{1}{2}1_{x<0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2\alpha^2}1_{x>0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ であり、x_t^n のそれの極限であること、$f(x_t)$ マルチンゲール $\Longleftrightarrow$ f は一次函数 $\Longleftrightarrow$ $\left(\frac{1}{2}1_{x<0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2\alpha^2}1_{x>0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)f=0$ なること、に注意しておこう。

§3 空間の変換 ……つぎに $y_t=\Phi_\alpha(x_t)$ とおく。ここで $\Phi_\alpha(x)=\begin{cases} x & x\le 0\\ \alpha x & x>0\end{cases}$ は$\mathbb{R}$の同相写像だから明らかに y_t も、マルコフ過程である。$g\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して $y_0\neq 0$ なら $E\left[\frac{g(y_t)-g(y_0)}{t}\right]\longrightarrow\frac{1}{2}g''(y_0)$ $(t\downarrow 0)$ であるが $y_0=0$ においては $C_\alpha g'(0)$ に収束する。このC_αを決めるために、$h(y_t)$ をマルチンゲールにするhを探す。$h(y_t)$ マルチンゲール $\Longleftrightarrow$ $h\circ\Phi_\alpha(x_t)$ マルチンゲール $\Longleftrightarrow$ $h\circ\Phi_\alpha$ は$\mathbb{R}_\pm$で一次函数、かつ $(h\circ\Phi_\alpha)'(-0)=(h\circ\Phi_\alpha)'(+0)$ $\Longleftrightarrow$ 〃 かつ $h'(-0)=\alpha h'(+0)$ だから、例えば $h=\Phi_{\frac{1}{\alpha}}$ は、そうである。従って§1, §2から y_t は $\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\log\alpha\,\delta\frac{\partial}{\partial y}$ を生成作用素とする、即ち $C_\alpha=\frac{1}{2}\log\alpha$ であることがわかる。

§4 2階の係数も、不連続のとき …… 一般に、$Z_t=\Phi_\beta(x_t^{(\alpha)})$ において α,β を動かすことにより、$x>0$ における2階微分係数と、$x=0$ でのdriftの係数を任意に変えたものが扱えるか考えてみよう。まず、明らかに $Z_t\longleftrightarrow L=\frac{1}{2}1_{x<0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\beta^2}{2\alpha^2}1_{x>0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c\delta\frac{\partial}{\partial x}$ と予想され、cさえ決めればよいのではないか、と思われるのだが、実は、そう簡単ではない。とりあえず $L_n=\frac{1}{2}1_{x<0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\beta^2}{2\alpha^2}1_{x>0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c\frac{n}{2}1_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}\frac{\partial}{\partial x}$ でLを近似してみる。L_nに対しては、$I=[-1,1]$ で、

次の“ディリクレ問題”が、有効である。

$$\begin{cases} L_n u_n = 0 \\ u_n(-1) = 0 \\ u_n(1) = 1 \\ u_n \in C^1(I) \end{cases}$$

$x = \pm\frac{1}{n}$, 0 での接続条件から一意解が求まることが初等的計算よりわかる。$n \to +\infty$ のときの近似計算より、$u_\infty = \lim_{n\to\infty} u_n$ が存在するが、このとき $\frac{1}{u_\infty(0)} = 1 + e^{-c(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2})}$ となる。他方で $u_\infty(Z_t)$ マルチンゲール $\Leftrightarrow u_\infty \circ \Phi_\beta$ は一次函数だから、結局、$c = \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\log\beta$ として値が確定する。L を L_n の極限と思った時は以上の如しであるが、一般に $\alpha \neq \beta$ のとき、L を別のものの極限と考えると、c は違った値になってしまう！ 例えば、

$\widetilde{L}_n = \frac{1}{2}1_{x<0}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\beta^2}{2\alpha^2}1_{x>0}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + cn1_{[-\frac{1}{n},0]}\frac{\partial}{\partial x}$ に対する、C^1 解 $\widetilde{u}_n$ を上と同様に考えて計算すると $c = \frac{1}{2}\log\beta$.

になり、$\widetilde{\widetilde{L}}_n = \frac{1}{2}1_{x<0}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\beta^2}{2\alpha^2}1_{x>0}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + cn1_{[0,\frac{1}{n}]}\frac{\partial}{\partial x}$ では $c = \frac{\beta^2}{2\alpha^2}\log\beta$ になってしまう。即ち次の結論を得る。

<u>結論</u>：$L = \frac{1}{2}1_{x<0}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}a^2 1_{x>0}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k\delta\frac{\partial}{\partial x}$ に対応する拡散過程を考える為には、L に、どんな近づき方をするのか指定しなければならない。δ を、どのような函数列で近似するのかによって異なるものになるからである。例えば $\frac{n}{2}1_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} \to \delta$ と考えるならば、求める拡散過程は $\Phi_\beta(x_t^{(\alpha)})$、但し $\alpha = \frac{1}{a}e^{\frac{k(a^2+1)}{a^2}}$, $\beta = e^{\frac{k(a^2+1)}{a^2}}$ である。

§5. …… $a \neq 1$ の時は drift の係数に δ がある場合既に困難な状況が現われたが $a=1$ の時は、drift の係数を、もっと一般化してもよいことを以下、簡単に骨子を述べる。$L_\mu = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x}$ を考えよう。ここで μ は測度で次の条件をみたすものとする。

$\exists\, 0 \leq M < \infty$ s.t. $\forall J$ 区間, $|\mu(J)| \leq M$.

μ が $\mathbb{R}$ 上の有界ボレル測度なら勿論よい。3つの方法が考えられる。(本質的に同じことではあるが)

(i) μ を discrete measure の列 $\mu_n = \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj}\,\delta_{x_{nj}}$ で近似して、今までのやり方を組みあわせて拡散過程を構成して、$n \to +\infty$ とする。

(ii) サポートがコンパクトで、なめらかな非負函数 χ により正則化して $\psi_\varepsilon = \chi_\varepsilon * \mu$ を考え §1 における $\Phi_{n\alpha}$ のかわりに $\Phi_\varepsilon(x) = \int_0^x e^{2\int_{-\infty}^{y}\psi_\varepsilon(\xi)d\xi}dy$ を考えて、同様にして S.D.E. を解いて拡散過程を作り $\varepsilon \downarrow 0$ とする。

(iii) 近似をとることなく $\Phi(x) = \int_0^x e^{2\mu((0,y])}dy$ で同様に作る。

注意 $\frac{1}{2}y'' + \mu y = 0$ を $\frac{y''}{y'} = -2\mu$, $\log y' = -2\mu((0,x])$ + const だから $y(x) = C_1\int_0^x e^{-2\mu((0,y])}dy + C_2$ として、常微分方程式の範囲で、"解ける" ことは当然であるがまたフーリエ変換をとって扱うことも可能であろう。

参考文献

[1] J.M. Harrison & L.A. Shepp, Ann. of Prob. 9 (1981) p. 309−313

[2] J.B. Walsh, Astérisque 52-53 (1978) p.37−45

[3] M. Motoo − T. Shiga, Personal communication

[4] Le Gall, Thèse, Université Paris VI (1982) 90P.

[5] 渡辺信三, 確率微分方程式, 産業図書, (1975)

後注：他に[4]の参考文献等、関連した文献は数多いと考えられるが、我々は可能な限り目を通した、というわけではないので、上のもの以外に見落としているかもしれないことを、お断りしておきます。